

## MODUL 9

### DERIVATIF TINGKAT TINGGI

#### 9.1 Derivatif Fungsi-fungsi Implisit

Persamaan  $f(x,y) = 0$  pada suatu daerah tertentu, menentukan  $y$  sebagai fungsi implisit dari  $x$ , maka turunan  $y$  dapat ditentukan sbb :

- Jika mungkin ubalah fungsi implisit, menjadi fungsi eksplisit  $y = g(x)$ , kemudian diferensialkan.
- Pikirkan  $y$  sebagai fungsi  $x$ , kemudian turunkan persamaan implisit tersebut terhadap  $x$  dan persamaan yang diperoleh agar dipecahkan untuk  $y'$

Contoh-contoh :

Selesaikan diferensiasi fungsi implisit berikut kedalam turunan pertama dan ke dua

1.  $xy + x - 2y - 1 = 0$
2.  $xy - x + y - 2 = 0$
3.  $y^2 = 2x^3$
4.  $x^2 + 5y^2 = 1$
5.  $x^3 + x^2y - 10y^4 = 0$

Penyelesaian.

1. Ubah fungsi tersebut kedalam fungsi eksplisit lalu turunkan

$$xy + x - 2y - 1 = 0$$

$$(x - 2)y = 1 - x$$

$$y = \frac{1-x}{x-2} \quad y' = \frac{(x-2)(-1) - (1-x).1}{(x-2)^2} =$$

$$y' = \frac{-x+2-1-x}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$2. \quad xy - x + y - 2 = 0$$

$$xy - y = 2 + x$$

$$(x + 1)y = 2 + x$$

$$y = \frac{2 + x}{x + 1}$$

$$y' = \frac{(x+1)(1) - (2+x) \cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{x+1-2-x}{(x+1)^2} \quad y' = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$3. \quad y^2 = 2x^3 \quad \text{Persamaan tetap dalam fungsi implisit}$$

$$d/dx (y^2) = d/dx (2x^3)$$

$$2y y' = 6x^2$$

$$y' = 6x^2/2y \quad y' = 3x^2/y. \quad 2y \neq 0$$

$$4. \quad x^2 + 5y^2 = 1$$

$$d/dx (x^2) + d/dx (5y^2) = d/dx (1)$$

$$2x + 10yy' = 0$$

$$y' = -2x/10y \text{ atau } y' = -x/5y. \quad y \neq 0$$

$$5. \quad x^3 + x^2y - 10y^4 = 0$$

$$d/dx (x^3) + d/dx (x^2y) - d/dx (10y^4) = d/dx (0)$$

$$3x^2 + 2xy + x^2y' - 40y^3y' = 0$$

$$40y^3y' - x^2y' = 3x^2 + 2xy$$

$$(40y^3 - x^2)y' = 3x^2 + 2xy$$

$$y' = \frac{3x^2 + 2xy}{40y^3 - x^2}$$

## 9.2 Derivatif Tingkat Tinggi

Misalnya  $y = f(x)$ , fungsi  $x$  yang dapat di diferensiasikan dan turunannya disebut turunan pertama, jika hasil turunan ini diturunkan lagi sampai ketinggian yang lebih tinggi, maka disebut diferensiasi tingkat tinggi.

Turunan dari suatu orde disuatu titik hanya mungkin ada jika fungsi dari semua turunan lebih rendah dapat didiferensiasikan di titik tersebut.

Misal  $y = f(x)$

Turunan pertamanya :  $y' = dy / dx = f'(x)$

Turunan keduanya :  $y'' = d^2y / dx^2 = f''(x)$

Turunan ketiganya :  $y''' = d^3y / dx^3 = f'''(x)$

Turunan ke-n :  $y^n = d^n y / dx^n = f^n(x)$ .....dst.

Contoh-contoh :

1. Carilah turunan ke 4nya fungsi  $y = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

$$\text{Jawab : } y' = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2$$

$$y'' = 60x^2 - 24x + 6$$

$$y''' = 120x - 24$$

$$y^4 = 120$$

2. Carilah Turunan kedua dari fungsi  $xy + 2x - 4y = 10$

$$\text{Jawab : } d / dx (xy) + d / dx (2x) - d / dx (4y) = d / dx (10)$$

$$y + xy' + 2 - 4y' = 0 \text{ atau } x y' - 4 y' = -2 - y$$

$$(x - 4) y' = -(2 + y) \quad y' = \frac{-(2 + y)}{(x - 4)}$$

dari  $y + xy' + 2 - 4y' = 0$  kita turunkan lagi

$$d / dx (y) + d / dx (x y') + d / dx (2) - d / dx (4y') = d / dx (0)$$

$$y' + y' + xy'' - 4y'' = 0$$

$$2y' + (x-4)y'' = 0$$

$$(x-4)y'' = -2y'$$

$$(x-4)y'' = -2\left(\frac{-(2+y)}{(x-4)}\right)$$

$$(x-4)y'' = \frac{4-2y}{(x-4)}$$

$$y'' = \frac{4-2y}{(x-4)^2}$$

3. Hitung  $y'$  dan  $y''$  pada  $x = 1$  dan  $y = -1$  untuk fungsi  $x^3y + xy^3 = 2$

Jawab :

$$d/dx(x^3y) + d/dx(xy^3) = d/dx(2)$$

$$3x^2y + x^3y' + y^3 + 3xy^2y' = 0$$

$$x^3y' + 3xy^2y' = -(3x^2y + y^3)$$

$$(x^3 + 3xy^2)y' = -(3x^2y + y^3)$$

$$y' = \frac{-(3x^2y + y^3)}{(x^3 + 3xy^2)}$$

untuk  $x = 1$  dan  $y = -1$  kita masukan harga tersebut ke  $y'$  maka diperoleh  $y' = 1$

untuk  $y''$  dari  $3x^2y + x^3y' + y^3 + 3xy^2y' = 0$  kita turunkan lagi

$$d/dx(3x^2y) + d/dx(x^3y') + d/dx(y^3) + d/dx(3xy^2y') = 0$$

$$6xy + 3x^2y' + 3x^2y' + x^3y'' + 3y^2y' + 3y^2y' + 6xyy'y' + 3xy^2y'' = 0$$

$$x^3y'' + 3xy^2y'' = -6xy - 6x^2y' - 6y^2y' - 6xyy'^2$$

$$(x^3 + 3xy^2)y'' = -(6xy + 6x^2y' + 6y^2y' + 6xyy'^2)$$

$$y'' = \frac{-(6xy + 6x^2y' + 6y^2y' + 6xyy'^2)}{x^3 + 3xy^2}$$

untuk  $x = 1$ ,  $y = -1$  dan  $y' = 1$ , didapat  $y'' = 0$

Selesaikan diferensiasi fungsi implisit berikut kedalam turunan pertama dan ke dua

6.  $xy + x - 2y - 1 = 0$

7.  $xy - x + y - 2 = 0$

8.  $y^2 = 2x^3$

9.  $x^2 + 5y^2 = 1$

10.  $x^3 + x^2y - 10y^4 = 0$

Penyelesaian.

1. Ubah fungsi tersebut kedalam fungsi eksplisit lalu turunkan

$$xy + x - 2y - 1 = 0$$

$$(x - 2)y = 1 - x$$

$$y = \frac{1-x}{x-2} \quad y' = \frac{(x-2)(-1) - (1-x).1}{(x-2)^2} =$$

$$y' = \frac{-x+2-1-x}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

4.  $xy - x + y - 2 = 0$

$$xy - y = 2 + x$$

$$(x + 1)y = 2 + x$$

$$y = \frac{2+x}{x+1}$$

$$y' = \frac{(x+1)(1) - (2+x).1}{(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{x+1-2-x}{(x+1)^2} \quad y' = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

3.  $y^2 = 2x^3$       Persamaan tetap dalam fungsi implisit

$$d/dx (y^2) = d/dx (2x^3)$$

$$2y y' = 6x^2$$

$$y' = 6x^2/2y \quad y' = 3x^2/y. \quad 2y \neq 0$$

$$4. x^2 + 5y^2 = 1$$

$$d/dx (x^2) + d/dx (5y^2) = d/dx (1)$$

$$2x + 10yy' = 0$$

$$y' = -2x/10y \text{ atau } y' = -x/5y. \quad y \neq 0$$

$$5. x^3 + x^2y - 10y^4 = 0$$

$$d/dx (x^3) + d/dx (x^2y) - d/dx (10y^4) = d/dx (0)$$

$$3x^2 + 2xy + x^2y' - 40y^3y' = 0$$

$$40y^3y' - x^2y' = 3x^2 + 2xy$$

$$(40y^3 - x^2)y' = 3x^2 + 2xy$$

$$y' = \frac{3x^2 + 2x}{40y^3 - x^2}$$

### 9.3 Derivativ Tingkat Tinggi

Misalnya  $y = f(x)$ , fungsi  $x$  yang dapat di diferensiasikan dan turunannya disebut turunan pertama, jika hasil turunan ini diturunkan lagi sampai ketinggian yang lebih tinggi, maka disebut diferensiasi tingkat tinggi.

Turunan dari suatu orde disuatu titik hanya mungkin ada jika fungsi dari semua turunan lebih rendah dapat didiferensiasikan di titik tersebut.

Misal  $y = f(x)$

Turunan pertamanya :  $y' = dy / dx = f'(x)$

Turunan keduanya :  $y'' = d^2y / dx^2 = f''(x)$

Turunan ketiganya :  $y''' = d^3y / dx^3 = f'''(x)$

Turunan ke-n :  $y^n = d^n y / dx^n = f^n(x) \dots \dots \dots \text{dst.}$

Contoh-contoh :

1. Carilah turunan ke 4nya fungsi  $y = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

$$\text{Jawab : } y' = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2$$

$$y'' = 60x^2 - 24x + 6$$

$$y''' = 120x - 24$$

$$y^{(4)} = 120$$

2. Carilah Turunan kedua dari fungsi  $xy + 2x - 4y = 10$

$$\text{Jawab : } d/dx(xy) + d/dx(2x) - d/dx(4y) = d/dx(10)$$

$$y + xy' + 2 - 4y' = 0 \text{ atau } xy' - 4y' = -2 - y$$

$$(x - 4)y' = -(2 + y) \quad y' = \frac{-(2 + y)}{(x - 4)}$$

dari  $y + xy' + 2 - 4y' = 0$  kita turunkan lagi

$$d/dx(y) + d/dx(xy') + d/dx(2) - d/dx(4y') = d/dx(0)$$

$$y' + y' + xy'' - 4y'' = 0$$

$$2y' + (x - 4)y'' = 0$$

$$(x - 4)y'' = -2y'$$

$$(x - 4)y'' = -2 \left( \frac{-(2 + y)}{(x - 4)} \right)$$

$$(x - 4)y'' = \frac{4 - 2y}{(x - 4)}$$

$$y'' = \frac{4 - 2y}{(x - 4)^2}$$

5. Hitung  $y'$  dan  $y''$  pada  $x = 1$  dan  $y = -1$  untuk fungsi  $x^3y + xy^3 = 2$

Jawab :

$$d/dx(x^3y) + d/dx(xy^3) = d/dx(2)$$

$$3x^2y + x^3y' + y^3 + 3xy^2y' = 0$$

$$x^3 y' + 3 x y^2 y' = - (3 x^2 y + y^3)$$

$$(x^3 + 3 x y^2) y' = - (3 x^2 y + y^3)$$

$$y' = \frac{-(3x^2 y + y^3)}{(x^3 + 3xy^2)}$$

untuk  $x = 1$  dan  $y = -1$  kita masukan harga tersebut ke  $y'$  maka diperoleh  $y' = 1$

untuk  $y''$  dari  $3x^2 y + x^3 y' + y^3 + 3 x y^2 y' = 0$  kita turunkan lagi

$$d/dx (3x^2 y) + d/dx (x^3 y') + d/dx (y^3) + d/dx (3xy^2 y') = 0$$

$$6xy + 3 x^2 y' + 3 x^2 y' + x^3 y'' + 3 y^2 y' + 3 y^2 y' + 6 x y y' y' + 3 x y^2 y'' = 0$$

$$x^3 y'' + 3x y^2 y'' = - 6 x y - 6 x^2 y' - 6 y^2 y' - 6 x y y'^2$$

$$(x^3 + 3 x y^2) y'' = - (6 x y + 6 x^2 y' + 6 y^2 y' + 6 x y y'^2)$$

$$y'' = \frac{-(6xy + 6x^2 y' + 6y^2 y' + xyy'^2)}{x^3 + 3xy^2}$$

untuk  $x = 1, y = -1$  dan  $y' = 1$ , didapat  $y'' = 0$